прикладные науки. – 615 с. – С. 487-488.

3. Моделирование расчетов в информационно-аналитической системе энергосберегающих вентиляции и кондиционирования воздуха / А.К. Погодаев, С.Л. Блюмин, П.В. Сараев, В.В. Правильникова : Сб. матер. IX Международной науч.-практ. интернет-конф. «ЭНЕРГО- И РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЕ – XXI ВЕК», г. Орел, 15 марта – 30 июня 2011 г. – Орел: ОрГТУ, 2011. SD [Электронный ресурс] CD-ROM.

4. Блюмин С.Л., Правильникова В.В. Энергосберегающие системы управления микроклиматом в плавательных бассейнах // Экология Центрально-Черноземной области Российской Федерации. – 2011. – № 2. – С. 7-10.

5. Программное обеспечение «Автоматизация системы вентиляции и кондиционирования воздуха в плавательном бассейне» / Свидетельство о государственной регистрации в Отраслевом фонде алгоритмов и программ ОФАП № 50201150646 от 11.05.2011 г.

Поступила в редакцию 14.11.2013 г.

Blumin S.L., Pravilnikova V.V. (LSTU, Lipetsk)

MATHEMATICAL MODELING USAGE IN VENTILATION AND AIR-CONDITIONING SYSTEMS OF THE SWIMMING POOL ACCOMMODATION

The given article is devoted to mathematical modeling methods with the help of which we have studied ventilation and air-conditioning systems in the swimming pool accommodation. As a result of mathematical methods usage the incoming air consumption for microclimate parameters provision in accordance with sanitary norms decreases, providing resource-saving.

Key words: mathematical modeling, air-conditioning, resource-saving.

УДК 519.1+621.3

Блюмин С.Л.[1]

ГРАФОСТРУКТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОСИСТЕМ. ЗВЕЗДОЦВЕТЫ КАК ГРАФЫ И ГИПЕРГРАФЫ

Представлены матричные характеристики простейшего звездоцвета, трактуемого как граф и гиперграф.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: звездоцветы, графы, гиперграфы, матрицы инцидентности, валентности, смежности, лапласианы.

[1]д-р физ.-мат. наук, проф., ЛГТУ-ЛЭГИ, г. Липецк, Россия;
e-mail: slb@stu.lipetsk.ru

ВВЕДЕНИЕ

Применение разнообразных графовых структур прочно вошло в практику моделирования экосистем. Цветы представляют собой миниатюрные экологические системы. «Цветочная» терминология давно используется в теории и приложения графов.

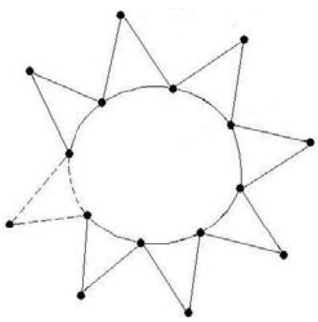
* Работа поддержана РФФИ, проект № 11-07-97504-р_центр_а

Так, в классической монографии по теории графов [1] уже встречаются розы (rose, rosette), которые впоследствии эффективно прилагаются к исследованию социальных, биологических и экологических систем [2].

В последнее время активно изучаются звездоцветы (starflowers) [3]; в частности, к ним могут быть отнесены подсолнухи (sunflowers) [4], введенные в рассмотрение в классической работе [5].

К графовым структурам, наряду с обычными графами, относятся гиперграфы, метаграфы и обобщающие их итергиперграфы [6].

Звездоцвет состоит из ядра (core) C, лепестков (petals) P и может быть стилизованно изображён графом, представленным на рисунке [3]. Он допускает интерпретацию и как гиперграф, если ядро и лепестки рассматривать как гиперрёбра.



Стилизованное изображение звездоцвета

Существенную роль при изучении графовых структур играют матричные характеристики: матрицы инцидентности I, валентности D, смежности A и связывающие их между собой лапласианы L [7].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Цель данной работы – представить матричные характеристики простейшего звездоцвета, трактуемого как граф и гиперграф.

Для упрощения дальнейших рассмотрений целесообразно ограничиться случаем, когда в ядро входят три вершины, а на каждом лепестке находится ещё одна вершина, так что общее число вершин равно шести. Кроме того, имея в виду некоторые приложения, лепестки предполагаются ориентированными подграфами. Занумеровав вершины некоторым произвольным, но фиксированным образом, такой звездоцвет можно описать как смешанный граф G=(V,C,P) с множеством вершин $V=\{v_1, \ldots, v_6\}$, множеством рёбер (неупорядоченных пар вершин) $C=\{e_1=\{v_1,v_2\}, e_2=\{v_2,v_3\}, e_3=\{v_3,v1\}\}$ (ядром) и множеством дуг (упорядоченных пар вершин) $P=\{a_1=(v_1,v_4), a_2=(v_4,v_2), a_3=(v_2,v_5), a4=(v_5,v_3), a_5=(v_3,v_6), a_6=(v_6,v_1)\}$ (лепестков). Так выглядит

$$I(G)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

матрица инцидентности этого графа (при указанном порядке вершин, рёбер и дуг).

Лапласиан этого графа определяется по формуле

$$L(G)=I(G)\cdot I(G)^T=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Он раскладывается в сумму матриц

$$
L(G)=\begin{bmatrix}4&0&0&0&0&0\\0&4&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+
$$

$$
+(-1)\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\\1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\end{bmatrix}=D(G)+A(C)-A(P),
$$

где D(G) – матрица валентностей – степеней всех вершин; A(C) – матрица смежности вершин неориентированного ядра; A(P) – матрица смежности вершин ориентированных лепестков.

Следует отметить, что в теории графов более привычными являются разложения L = D–A для стандартного и L = D+A для беззнакового лапласианов.

Звездоцвет можно описать и как смешанный гиперграф HG= (V,HC,HP) с тем же множеством вершин, множеством гиперрёбер (неупорядоченных троек вершин; в данном случае такая тройка одна) HC={he={v_1,v_2,v_3}} (ядром) и множеством гипердуг (упорядоченных троек вершин) HP={ha_1= =(v_1,v_4,v_2), ha_2=(v_2,v_5,v_3), ha_3=(v_3,v_6,v_1)} (лепестков; в данном случае их три). Матрица инцидентности этого гиперграфа (при указанном порядке вершин, гиперрёбер и гипердуг), с использованием предложенного в [7] кодирования вершин гипердуг комплексными кубическими корнями из единицы

$\varepsilon^0=1$, $\varepsilon^1=\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon^2=\bar{\varepsilon}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (комплексно сопряжённый), представится в виде

$$
I(HG)=\begin{bmatrix}1&\bar{\varepsilon}&0&1\\1&1&\bar{\varepsilon}&0\\1&0&1&\bar{\varepsilon}\\0&\varepsilon&0&0\\0&0&\varepsilon&0\\0&0&0&\varepsilon\end{bmatrix}.
$$

Лапласиан этого гиперграфа определяется по формуле

$$
L(HG)=I(HG)\cdot I(HG)^{*}=
$$

$$
=\begin{bmatrix}3&1+\bar{\varepsilon}&1+\varepsilon&\varepsilon&0&\bar{\varepsilon}\\1+\varepsilon&3&1+\bar{\varepsilon}&\bar{\varepsilon}&\varepsilon&0\\1+\bar{\varepsilon}&1+\varepsilon&3&0&\bar{\varepsilon}&\varepsilon\\\bar{\varepsilon}&\varepsilon&0&1&0&0\\0&\bar{\varepsilon}&\varepsilon&0&1&0\\\varepsilon&0&\bar{\varepsilon}&0&0&1\end{bmatrix}
$$

(I(HG)* – эрмитово сопряжённая матрица).

Он раскладывается в сумму матриц

$$
L(HG)=\begin{bmatrix}3&0&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+
$$

$$
+\varepsilon\begin{bmatrix}0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}+\bar{\varepsilon}\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}=
$$

$$
=D(HG)+A(HC)+\varepsilon A(HP;\varepsilon)+\bar{\varepsilon}A(HP;\bar{\varepsilon}),
$$

где D(HG) – матрица валентностей – степеней всех вершин в гиперграфе; A(HC) – матрица смежности вершин неориентированного ядра, кодированных числом 1; A(HP; ε) – матрица смежности вершин ориентированных лепестков, кодированных числом ε, A(HP; $\bar{\varepsilon}$) – матрица смежности вершин ориентированных лепестков, кодированных числом $\bar{\varepsilon}$.

Следует отметить, что это разложение, как и приведенное выше разложение матрицы L(G) (где вершины кодируются квадратными корнями из единицы ±1), соответствует указанному в [7] общему разложению лапласиана оргиперграфа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные представления допускают распространение на звездоцветы с произвольным количеством вершин в ядре и лепестках.

Список литературы

1. Берж К. Теория графов и её применения. – М.: ИЛ, 1962. – 320 с.

2. Робертс Ф. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Наука, 1986. – 496 с.

3. Modabish A., El Marraki M. Counting the Number of Spanning Trees in the Star Flower Planar Map // Appl. Math. Sci. – 2012. – Vol. 6, No. 49. – P. 2411-2418.

4. Alon N., Shpilka A., Umans C. On Sunflowers and Matrix Multiplication // Comput. Complex. – 2013. – №. 22. – P. 219-243.

5. Erdos P., Rado R. Intersection Theorems for Systems of Sets // J. London Math. Soc. – 1960. – Vol. 35. – P. 85-90.

6. Блюмин С.Л. Итергиперграфы: расширенный класс графовых моделей больших систем // Управление большими системами-2011: Междунар. науч.-прак. мультиконф: Труды. Т. 1. – М.: Изд-во ИПУ РАН, 2011. – С. 11-15.

7. Блюмин С.Л. Оргиперграфы: матричные представления // Управление большими системами: Сб. науч. тр. – Спец. вып. 30.1 «Сетевые модели в управлении». – М.: Изд-во ИПУ РАН, 2010. – С. 22-39.

Поступила в редакцию 05.11.2013 г.

Blumin S.L.
(LSTU-LEGI, Lipetsk)

GRAPHOSTRUCTURAL SIMULATION OF ECOSYSTEMS. STARFLOWERS AS GRAPHS AND HYPERGRAPHS

The given article presents matrix characteristics of a simple starflower considered as a graph or hypergraph.

Key words: starflowers, graphs, hypergraphs, incidence matrixes, valences, contiguities, Laplacians.